Was macht die harmonische Reihe so besonders?

Endliche Summen, Oresmes Blöcke und die Primzahlkoordinaten der Geraden und Ungeraden

Michael Emmerich

20. Oktober 2026
Überarbeitete Fassung; Erstfassung vom 18. Oktober 2026

Zusammenfassung

Die harmonischen Zahlen verbinden eine Grenze des Wachstums mit einer besonders einfachen Teilbarkeitsstruktur. Wir beginnen mit endlichen Summen, verallgemeinern Oresmes Blockargument auf reziproke Potenzen und beweisen schärfere Schranken durch Teleskopieren. Anschließend untersuchen wir die Summen in den signierten Primzahlkoordinaten des Primzahlen Uhrwerks. Zwei vollständig bewiesene Identitäten bilden den arithmetischen Kern:

$$v_2(H_N) = -\lfloor \log_2 N \rfloor, \qquad v_2\left(\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2j-1}\right) = 2v_2(N).$$

Eine endliche Rekursion beschreibt außerdem, wie jede gewählte Primzahlspalte autonom mit eigener modularer Genauigkeit und eigener Zeilenhistorie fortgeschrieben werden kann. Eine Regel für die führende Indexziffer erklärt erste Muster der Spalten für 2, 3 und 5. Ein Vergleich mit den Dreieckszahlen zeigt, weshalb deren Spalten einfacher sind und wie ihre Kehrwerte exakt als zweite Differenzen harmonischer Zahlen auftreten. Grenzwerte dienen erst anschließend der quantitativen Einordnung. Der Text ist eine eigenständig lesbare Ausarbeitung zum Mathematical-Playground-Beitrag *What makes the Harmonic Series so special?*; er beansprucht keine neuen Beweise der Riemannschen Vermutung.

© 2026 Michael Emmerich. Originaltext, eigene Abbildungen und Quelltext stehen unter Creative Commons Namensnennung 4.0 International (CC BY 4.0). Fremdwerke behalten ihre eigenen Rechte. Alle Abbildungen sind unmittelbar in dieser LaTeX-Datei mit TikZ/PGF erzeugt.

Inhaltsverzeichnis

1 Warum wir die Brüche selbst verfolgen **3**

1.1 Eine Saite als Einstieg 3

2 Oresmes Blöcke und die Grenze beim Exponenten eins **4**

3 Schärfere endliche Schranken durch Teleskopieren **5**

4 Das Primzahlen Uhrwerk: eine Spalte pro Primzahl **6**

4.1 Signierte Koordinaten für rationale Zahlen 7

5 Die Zweier-Treppe der harmonischen Zahlen **8**

6 Gerade und ungerade Nenner: ein exaktes Gegenstück **9**

7 Harmonische Zeilen: autonome Spalten im +1-Takt **11**

7.1 Welche Größe steht in welcher Anzeige? 11

7.2 Von der ersten Zeile zur sechsten 12

7.3 Die allgemeine Taktregel und ihre Eingaben 13

7.4 Genauigkeit aus der eigenen Zeilenhistorie 13

7.5 Endlicher Auswerter ohne Wiederholung des Präfixes 15

7.6 Das Autonomieprinzip 16

7.7 Ein erstes Muster: die führende Ziffer des Index 18

7.8 Vergleich mit den Dreieckszahlen 19

7.9 Harmonische Differenzen: autonome Bewertungsspalten im +1-Takt 23

8 Was die Primzahlkoordinate leistet und was nicht **26**

9 Ausblick: Euler–Mascheroni und Lagarias **27**

1 Warum wir die Brüche selbst verfolgen

Die harmonische Reihe ist interessant, weil in einer sehr einfachen Vorschrift viele mathematische Fragen zusammentreffen. Für eine positive ganze Zahl N setzen wir

$$H_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}. \tag{1}$$

Jede dieser Zahlen ist rational. Statt sie früh auf die Aussage $H_N \to +\infty$ zu reduzieren, behalten wir den endlichen Index N, die Zähler und Nenner sowie ihre Primfaktoren bei. Ein Grenzwert ist eine nützliche Information, aber keine vollständige Beschreibung der zugrunde liegenden Folge. Beispielsweise haben 2^{-N} und 3^{-N} denselben reellen Grenzwert null; ihre Primzahlkoordinaten sind verschieden. Das bildhafte Wort vom „Zerquetschen“ bezeichnet hier diesen Informationsverlust durch eine Zusammenfassung, keinen Fehler der Grenzwerttheorie.

Das Arbeitsprinzip lautet: zuerst exakte endliche Identitäten und ausdrückliche Schranken, danach, wenn erwünscht, die Grenzwertaussage. Ein großes N bleibt eine gewöhnliche natürliche Zahl. Weder eine hyperreelle Erweiterung noch eine philosophische Position zum Unendlichen ist hierfür nötig.

1.1 Eine Saite als Einstieg

Bei einer idealen, an beiden Enden befestigten Saite der Länge L besitzt die n-te Schwingungsform die Frequenz nf_1 und den Abstand L/n zwischen benachbarten Knoten. So erscheinen reziproke ganze Zahlen schon in der Musik. Die Überlagerung mehrerer solcher Formen addiert ihre Auslenkungen; bei linearer Überlagerung bleiben die ausgewählten Frequenzen die Bestandteile des Signals.

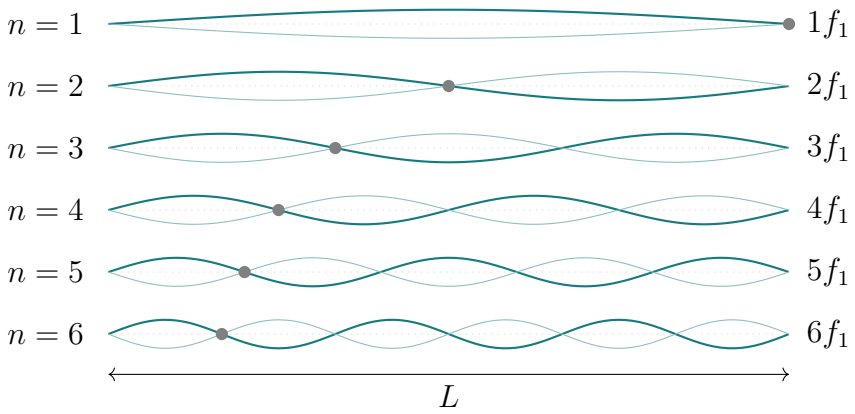

Abbildung 1: Sechs Schwingungsformen derselben Saite. Graue Punkte markieren den jeweils ersten Knoten rechts vom linken Ende: $x/L = 1/n$. Zwei Kurven zeigen entgegengesetzte Auslenkungen, nicht zwei verschiedene Frequenzen.

Für positive a, b heißt $2/(1/a + 1/b)$ ihr harmonisches Mittel. Die Folge der Kehrwerte ist eine *harmonische Progression*, denn für $n \geq 2$ gilt

$$\mathrm{HM}\Big(\frac{1}{n-1}, \frac{1}{n+1}\Big) = \frac{2}{(n-1)+(n+1)} = \frac{1}{n}.$$

Kullman (2001) erläutert den Zusammenhang mit antiken musikalischen Verhältnissen und unterscheidet ihn von der späteren Benennung der Reihe. Oresmes Divergenzbeweis stammt aus dem 14. Jahrhundert; daraus folgt nicht, dass er auch den Ausdruck „harmonische Reihe“ geprägt hat. Eine gut lesbare Begleitung bietet Havil (2003); zur Biografie Oresmes genügt der im Literaturverzeichnis verlinkte Überblick. Oresme wurde später Bischof von Lisieux.

2 Oresmes Blöcke und die Grenze beim Exponenten eins

Für reelles s und endliches $N \geq 1$ definieren wir

$$Z_N(s) = \sum_{n=1}^{N} n^{-s}, \qquad Z_N(1) = H_N.$$

Der Fall $s = 1/2$ dient als algebraischer Vergleich: seine Summanden sind im Allgemeinen nicht rational. Unser arithmetischer Hauptgegenstand bleibt H_N.

Lemma 2.1 (Endliche Blockschranken)**.** *Für $s > 0$ und $r \geq 0$ sei*

$$\mathcal{B}_r(s) = \sum_{n=2^r+1}^{2^{r+1}} n^{-s}.$$

Dann gilt mit $q = 2^{1-s}$

$$2^{-s} q^r \leq \mathcal{B}_r(s) < q^r. \tag{2}$$

Beweis. Der Block enthält 2^r Summanden. Wegen $2^r < n \leq 2^{r+1}$ liegt jeder zwischen $2^{-(r+1)s}$ und, strikt, 2^{-rs}. Multiplikation mit der Anzahl 2^r ergibt die Behauptung. □

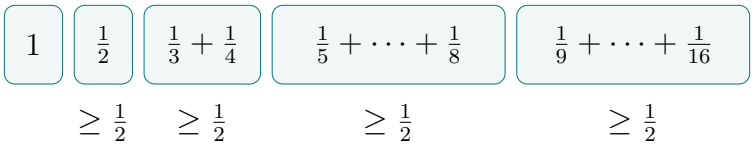

Abbildung 2: Oresmes Zerlegung. Nach der einzelnen Eins folgen Blöcke mit $1, 2, 4, 8, \ldots$ Summanden. Die Kästen sind schematisch; ihre Breite ist nicht proportional zur Anzahl aller späteren Summanden.

Satz 2.2 (Die Konvergenzgrenze)**.** *Die positive Reihe mit Summanden n^{-s} konvergiert für reelles s genau dann, wenn $s > 1$. Die folgenden endlichen Aussagen präzisieren den Beweis:*

$$0 < Z_M(s) - Z_N(s) < \frac{N^{1-s}}{1 - 2^{1-s}} \qquad (s > 1,\ M > N \geq 1), \tag{3}$$

$$1 + \frac{m}{2} \leq H_{2^m} < 1 + m \qquad (m \geq 1), \tag{4}$$

$$1 + 2^{-s}\frac{q^m - 1}{q - 1} \leq Z_{2^m}(s) < 1 + \frac{q^m - 1}{q - 1} \qquad (0 < s < 1,\ m \geq 1). \tag{5}$$

Beweis. Es gilt exakt $Z_{2^m}(s) = 1 + \sum_{r=0}^{m-1} \mathcal{B}_r(s)$. Für $q \neq 1$ ist

$$\sum_{r=0}^{m-1} q^r = \frac{q^m - 1}{q - 1};$$

die Identität folgt durch Subtraktion der Summe von ihrem q-fachen. Für $s = 1$ liefert Lemma 2.1 sofort (4), für $0 < s < 1$ liefert es (5). Deren untere Schranken wachsen unbegrenzt. Für $s \leq 0$ ist bereits jeder Summand mindestens eins.

Sei nun $s > 1$, also $0 < q < 1$. Zerlege den Bereich nach N an den endlichen Endpunkten $N, 2N, 4N, \ldots, 2^h N$, wobei $2^h N \geq M$. Block r besitzt $2^r N$ Summanden, die jeweils kleiner als $(2^r N)^{-s}$ sind. Seine Summe ist kleiner als $N^{1-s} q^r$. Deshalb

$$Z_M(s) - Z_N(s) < N^{1-s} \frac{1 - q^h}{1 - q} < \frac{N^{1-s}}{1 - q}.$$

Die rechte Seite wird mit wachsendem N beliebig klein, unabhängig vom endlichen $M > N$. Das ist die Cauchy-Bedingung. Erst die Vollständigkeit der reellen Zahlen liefert daraus den endlichen Grenzwert, der für $s > 1$ $\zeta(s)$ heißt. □

s	q	Beitrag eines Blocks
2	$1/2$	$2^{-r}/4 \leq \mathcal{B}_r(2) < 2^{-r}$
1	1	$1/2 \leq \mathcal{B}_r(1) < 1$
$1/2$	$\sqrt{2}$	$2^{r/2}/\sqrt{2} \leq \mathcal{B}_r(1/2) < 2^{r/2}$

Die tatsächlichen Blockhöhen haben nicht notwendig das Verhältnis q. Dieses Verhältnis beschreibt die beiden Schranken. Es reicht aus, um die Grenze exakt festzulegen. Die Aussage betrifft die positive definierende Reihe. Der durch analytische Fortsetzung definierte Wert $\zeta(1/2)$ ist nicht ihr Grenzwert.

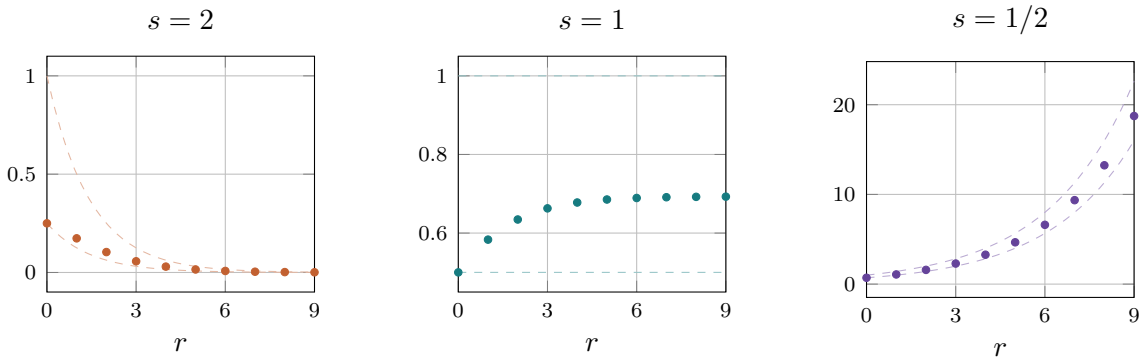

Abbildung 3: Die ersten zehn dyadischen Blöcke. Jeder Punkt steht für eine ganze Blocksumme $\mathcal{B}_r(s)$; gestrichelte Linien zeigen die bewiesenen Schranken. Die vertikalen Skalen sind verschieden. Bei $r = 0$ besteht der Block nur aus $1/2^s$, bei $r = 1$ aus den Nennern 3 und 4. Wurzelwerte sind numerisch gezeichnet; der Beweis verwendet die exakten Schranken.

3 Schärfere endliche Schranken durch Teleskopieren

Ein *Teleskopsummenargument* schreibt Summanden als Differenzen, deren innere Terme sich beim Addieren aufheben. Nur die Endpunkte bleiben.

Satz 3.1 (Die drei Vergleichsfälle)**.** *Für $N \geq 1$ und $M > N$ gilt*

$$2(\sqrt{N+1} - 1) < Z_N(1/2) \leq 2\sqrt{N} - 1, \tag{6}$$

$$1 + \frac{k}{2} \leq H_N < k + 2 \quad (2^k \leq N < 2^{k+1}), \tag{7}$$

$$\frac{1}{N+1} - \frac{1}{M+1} < Z_M(2) - Z_N(2) < \frac{1}{N} - \frac{1}{M}. \tag{8}$$

In (6) gilt die obere Gleichheit nur für $N = 1$.

Beweis. Rationalisieren ergibt für $n \geq 1$

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}).$$

Addiere die linke Schranke für $1 \leq n \leq N$. Für die rechte behalte den ersten Summanden als 1 und addiere erst ab $n = 2$. Das beweist (6). Für (7) verwende $H_{2^k} \leq H_N < H_{2^{k+1}}$ und (4); der Fall $k = 0$ folgt direkt aus $N = 1$.

Für $n \geq 2$ gilt durch direkten Bruchvergleich

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

Summiere von $N + 1$ bis M; dies ergibt (8). □

Damit folgt bereits bei jedem endlichen Index

$$1 \leq 2\sqrt{N} - Z_N(1/2) < 2.$$

Die Quadratwurzelsumme wächst also mit führendem Faktor $2\sqrt{N}$; erst am Schluss können wir $Z_N(1/2)/\sqrt{N} \to 2$ schreiben. Bei $s = 2$ ist jeder endliche Rest nach N kleiner als $1/N$. Dies ist ein zweiter Konvergenzbeweis, ohne geometrische Reihe und ohne Integral. Die harmonische Summe wächst demgegenüber auf der Skala der Anzahl der Verdopplungen.

4 Das Primzahlen Uhrwerk: eine Spalte pro Primzahl

Die Darstellung des *Primzahlen Uhrwerks* (englisch *The Prime Clockwork*) wird in Emmerich (2026) beschrieben. Eine Zeile gehört zur ganzen Zahl n, eine Spalte zur Primzahl p. Drei Tabellen führen verschiedene Informationen:

$$n = pM_p(n) + R_p(n), \qquad 0 \leq R_p(n) < p.$$

Der Minutenzähler $M_p(n) = \lfloor n/p \rfloor$ zählt vollständige Vielfache; der Sekundenzähler $R_p(n) = n \bmod p$ zeigt den Rest. Die Bewertung $V_p(n)$ zählt dagegen die Faktoren p in n. Beispielsweise sind bei $n = 12, p = 2$ die Minuten 6, die Sekunden 0 und die Bewertung 2.

Lemma 4.1 (Takt, neue Spalten und Bewertung)**.** *Eine installierte Spalte entwickelt sich durch den +1-Takt*

$$(R_p(n+1), M_p(n+1)) = \begin{cases} (R_p(n) + 1, M_p(n)), & R_p(n) < p - 1, \\ (0, M_p(n) + 1), & R_p(n) = p - 1. \end{cases}$$

Beginnt man bei $n = 1$ ohne Spalten und installiert bei jeder neuen Zeile ohne Klingeln eine Spalte mit dieser Zahl als Periode, so sind die installierten Perioden genau die Primzahlen. Mit Anfangswerten $V_p(j) = 0$ für $1 \le j < p$ gilt

$$V_p(n) = \begin{cases} 0, & R_p(n) \neq 0, \\ 1 + V_p(M_p(n)), & R_p(n) = 0. \end{cases}$$

Beweis. Die Taktregel erhält die Identität $n = pM_p(n) + R_p(n)$ unter Erhöhung um eins. Eine zusammengesetzte Zahl n besitzt einen kleineren Primteiler, dessen bereits installierte Spalte bei n klingelt. Bei einer Primzahl klingelt keine frühere Primzahlspalte. Induktion über die Zeilen beweist die Installationsaussage. Ist der Rest null, so gilt $n = pM_p(n)$ und somit $V_p(n) = 1 + V_p(M_p(n))$. Andernfalls teilt p die Zahl nicht. Da $M_p(n) < n$, verweist die Abfrage stets auf eine frühere Zeile derselben Spalte. □

	Bewertungen $V_p(n)$					Minuten $M_p(n)$					Sekunden $R_p(n)$				
n	2	3	5	7	11	2	3	5	7	11	2	3	5	7	11
1	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
2	1	·	·	·	·	1	·	·	·	·	0	·	·	·	·
3	0	1	·	·	·	1	1	·	·	·	1	0	·	·	·
4	2	0	·	·	·	2	1	·	·	·	0	1	·	·	·
5	0	0	1	·	·	2	1	1	·	·	1	2	0	·	·
6	1	1	0	·	·	3	2	1	·	·	0	0	1	·	·
7	0	0	0	1	·	3	2	1	1	·	1	1	2	0	·
8	3	0	0	0	·	4	2	1	1	·	0	2	3	1	·
9	0	2	0	0	·	4	3	1	1	·	1	0	4	2	·
10	1	0	1	0	·	5	3	2	1	·	0	1	0	3	·
11	0	0	0	0	1	5	3	2	1	1	1	2	1	4	0
12	2	1	0	0	0	6	4	2	1	1	0	0	2	5	1

Tabelle 1: Drei Tabellen mit derselben Zeilen- und Spaltenordnung. Die Spaltenköpfe sind Primzahlen. Ein Punkt bedeutet „noch nicht installiert“, nicht den Wert null. Die Minutenadresse darf nicht mit der vorhergehenden Zeile verwechselt werden.

4.1 Signierte Koordinaten für rationale Zahlen

Für $a = A/B > 0$ sei

$$v_p(a) = V_p(A) - V_p(B), \qquad P(a) = (v_2(a), v_3(a), v_5(a), \ldots).$$

Dieser Vektor hat endlichen Träger: Nur endlich viele Einträge sind ungleich null. Er ist unabhängig davon, ob A/B bereits gekürzt wurde. Positive Einträge gehören zum gekürzten Zähler, negative zum gekürzten Nenner. Für ganzzahlige $a, b > 0$ sind Minimum und Maximum der Exponenten die Bewertungen von $\mathrm{ggT}(a, b)$ und $\mathrm{kgV}(a, b)$. Multiplikation rationaler Zahlen addiert die Vektoren. *Addition* erfordert hingegen eine neue Zählerberechnung; Maximum und Minimum allein liefern die Faktoren dieser Summe nicht.

Die ganzzahlige Darstellung

$$D_N = \mathrm{kgV}(1, \ldots, N), \quad S_N = \sum_{j=1}^{N} D_N/j, \quad H_N = S_N/D_N$$

führt mit $g_N = \mathrm{ggT}(S_N, D_N)$ auf $A_N = S_N/g_N$ und $B_N = D_N/g_N$. Also ist $v_p(H_N) = V_p(S_N) - V_p(D_N)$. Ein Nennerprimfaktor kann höchstens N sein; ein neuer Zählerprimfaktor kann viel größer sein.

n	$H_n = A_n/B_n$	v_2	v_3	v_5	übrige Faktoren
1	1	0	0	0	1
2	3/2	−1	1	0	1
3	11/6	−1	−1	0	11
4	25/12	−2	−1	2	1
5	137/60	−2	−1	−1	137
6	49/20	−2	0	−1	7^2
7	363/140	−2	1	−1	$7^{-1}11^2$
8	761/280	−3	0	−1	$7^{-1}761$
9	7129/2520	−3	−2	−1	$7^{-1}7129$
10	7381/2520	−3	−2	−1	$7^{-1}11^261$
11	83711/27720	−3	−2	−1	$7^{-1}11^{-1}97 \cdot 863$
12	86021/27720	−3	−2	−1	$7^{-1}11^{-1}13^2509$

Tabelle 2: Harmonische Zahlen in Primzahlkoordinaten. Die letzte Spalte sammelt sämtliche Faktoren außerhalb der drei ausdrücklich gezeigten Spalten; damit ist jede Zeile vollständig. Unaufgeführte Primzahlkoordinaten sind null.

Ein Beispiel macht die Kürzung sichtbar:

$$H_5 + \frac{1}{6} = \frac{137 + 10}{60} = \frac{147}{60} = \frac{49}{20} = 2^{-2}5^{-1}7^2.$$

Die 3-Koordinate verschwindet, im Zähler entsteht 7^2. Bei der Darstellung durch signierte Exponenten ist die Kürzung bereits in der Differenz der Koordinaten enthalten.

5 Die Zweier-Treppe der harmonischen Zahlen

Definition 5.1. Eine rationale Zahl heißt *p-ganz*, wenn ihr gekürzter Nenner nicht durch p teilbar ist. Die Menge dieser Zahlen heißt $\mathbb{Z}_{(p)}$. Für $a \neq 0$ gilt $a \in \mathbb{Z}_{(p)}$ genau dann, wenn $v_p(a) \geq 0$; zusätzlich setzen wir $v_p(0) = +\infty$.

Lemma 5.2 (Eindeutig kleinste Bewertung)**.** *Für endlich viele rationale Zahlen $a_1, \ldots, a_m$ gilt*

$$v_p\left(\sum_i a_i\right) \geq \min_i v_p(a_i).$$

Wird das Minimum genau einmal angenommen, so gilt Gleichheit.

Beweis. Sei das Minimum h. Nach Division aller Summanden durch p^h sind sie p-ganz. Ihre Summe bleibt p-ganz, was die Ungleichung beweist. Bei eindeutigem Minimum besitzt genau einer dieser Summanden Bewertung null, alle übrigen sind durch p teilbar. Bringt man sie auf einen gemeinsamen, zu p teilerfremden Nenner, ist genau ein Zähler nicht durch p teilbar. Die Zählersumme ist deshalb nicht durch p teilbar. Die normierte Summe hat Bewertung null. □

Die folgende genaue Bewertung ist bereits bei Kamano (2011, S. 1, Beweis nach Theorem 1) enthalten.

Satz 5.3 (Die harmonische Zweier-Treppe)**.** *Für jedes $N \geq 1$ gilt*

$$\boxed{v_2(H_N) = -\lfloor \log_2 N \rfloor.}$$

Insbesondere ist H_N für $N \geq 2$ keine ganze Zahl.

Beweis. Setze $k = \lfloor \log_2 N \rfloor$. Unter $1, \ldots, N$ hat genau 2^k die Bewertung k: Ein weiteres ungerades Vielfaches wäre mindestens $3 \cdot 2^k > N$, ein gerades mindestens $2^{k+1} > N$. Alle anderen $1/j$ besitzen also eine größere Zweierbewertung als $1/2^k$. Lemma 5.2 beweist die Formel.

Äquivalent lässt sich direkt mit D_N argumentieren: $V_2(D_N) = k$, und unter den ganzen Zahlen D_N/j ist genau $D_N/2^k$ ungerade. Ihre Summe ist ungerade. Beim Kürzen von S_N/D_N kann somit kein Faktor zwei verschwinden. □

Für eine ungerade Primzahl können mehrere Nenner zugleich die maximale p-Bewertung besitzen. Dann ist das Minimum der Bewertungen ihrer Kehrwerte nicht eindeutig, und Auslöschungen werden möglich. Die Zweier-Spalte ist deshalb besonders einfach kontrollierbar. Dass eine Bewertung negativ ist oder abnimmt, sagt allerdings nichts darüber, ob die gewöhnliche Größe der Zahl abnimmt.

6 Gerade und ungerade Nenner: ein exaktes Gegenstück

Setze

$$U_N = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2j-1}.$$

Die Zerlegung nach geraden und ungeraden Nennern liefert ohne Näherung

$$\boxed{H_{2N} = U_N + \frac{1}{2} H_N.} \tag{9}$$

Alle Nenner von U_N sind ungerade. Die folgende bekannte Identität beschreibt genau, wie viele Faktoren zwei im gekürzten Zähler stehen. Sie wurde unter anderem von Sawin und Kim im MathOverflow-Austausch von 2016 bewiesen (Sawin und Kim, 2016); verwandte Fragen zu Differenzen harmonischer Zahlen behandelt Lengyel (2024).

Satz 6.1 (Bewertung der ungeraden Teilsumme)**.** *Für jedes $N \geq 1$ gilt*

$$\boxed{v_2(U_N) = 2v_2(N).}$$

Beweis. Sei $k = v_2(N)$, $M = 2^{k+1}$ und $x_j = 2j - 1$. Kongruenzen von Brüchen mit ungeradem Nenner werden über das modulare Inverse ihres Nenners gebildet. Das Inverse existiert, weil der Nenner zu M teilerfremd ist.

Die Abbildung $x_j \mapsto 2N - x_j$ kehrt die Liste der ungeraden Nenner um. Mitteln mit der umgekehrten Summe ergibt exakt

$$U_N = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{x_j} + \frac{1}{2N - x_j}\right) = N\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{x_j(2N - x_j)}.$$

Wegen $2N \equiv 0 \pmod{M}$ folgt

$$U_N/N \equiv -\sum_{j=1}^{N} x_j^{-2} \pmod{M}.$$

Es gibt 2^k ungerade Restklassen modulo M. In unserer Liste erscheint jede genau $N/2^k$-mal. Invertieren permutiert diese Klassen, daher

$$\sum_{j=1}^{N} x_j^{-2} \equiv \sum_{j=1}^{N} x_j^2 = \frac{N(4N^2 - 1)}{3} \equiv N \pmod{M}. \tag{10}$$

Die Summenformel folgt etwa durch Induktion: Der Unterschied des Ausdrucks bei N und $N-1$ ist $(2N-1)^2$. Der letzte Schritt benutzt, dass $(4N^2-1)/3$ als Bruch mit ungeradem Nenner kongruent zu eins modulo zwei ist; Multiplikation mit N hebt dies auf den Modul 2^{k+1}.

Also ist $U_N/N \equiv -N \pmod{2^{k+1}}$. Da $v_2(N) = k$, kann ein Fehler mit Bewertung mindestens $k+1$ die Bewertung k nicht ändern. Folglich gilt $v_2(U_N/N) = k$ und somit $v_2(U_N) = 2k$. □

Die ersten Werte sind $U_1 = 1$, $U_2 = 4/3$, $U_3 = 23/15$, $U_4 = 176/105$. Ihre Zweierbewertungen lauten $0, 2, 0, 4$. Für $N = 2^k$ stehen sich $v_2(H_N) = -k$ und $v_2(U_N) = 2k$ gegenüber. Beide Summen wachsen in gewöhnlicher Größe, während ihre Zweierkoordinaten sehr verschieden reagieren.

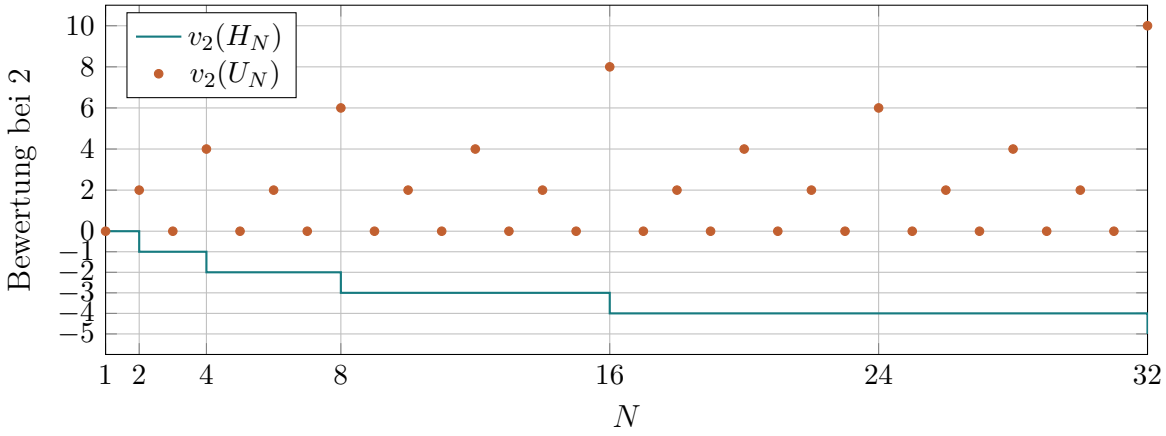

Abbildung 4: Exakte Primzahlkoordinaten für ganzzahlige $N = 1, \ldots, 32$. Orange Punkte gehören zu den ungeraden Teilsummen; die türkisfarbene Treppe zeigt die harmonischen Zahlen. Die Verbindung der Treppenpunkte ist nur eine Lesehilfe. Die vertikale Achse misst Teilbarkeit, nicht gewöhnliche Größe.

7 Harmonische Zeilen: autonome Spalten im +1-Takt

Die Entwicklung einer einzelnen Primzahlspalte ist ein eigener Untersuchungsgegenstand. Wir können eine Primzahl p fest wählen und die Folge $v_p(H_1), v_p(H_2), \ldots$ erzeugen, ohne die Spalten anderer Primzahlen zu berechnen. Die hier verwendete allgemeine Update-Regel führt mehr Information als den jeweils angezeigten Exponenten mit: Sie führt einen modularen Rest der skalierten Summe, die Skalierung und die Rechengenauigkeit mit. Der gemeinsame Index n zählt lediglich die Summanden. Die vollständigen Zähler und Nenner der harmonischen Summen werden nicht als Eingaben vorausgesetzt.

Die Berechnung harmonischer Summen mit endlich vielen p-adischen Ziffern wird bereits von Boyd (1994, §5.1, S. 293–294) beschrieben. Die Zerlegung nach durch p teilbaren Nennern steht auch hinter Boyd (1994, §3, Beweis von Lemma 3.1). Hier erläutern wir die Informationsabhängigkeiten der normierten Spaltenrechnung und das Nachfordern von Genauigkeit über gespeicherte eigene Zeilen. „Ohne Präfix-Replay“ bezeichnet diese Speicher- und Verfeinerungsstrategie; die zugrunde liegende Zerlegung wird nicht als neues Resultat beansprucht.

7.1 Welche Größe steht in welcher Anzeige?

Die Ganzzahlzähler $M_p(n) = \lfloor n/p \rfloor$ und $R_p(n) = n \bmod p$ betreffen den *Index* n. Der harmonische Ausgabeexponent $v_p(H_n)$ betrifft dagegen die *ganze Summe*. Beispielsweise hat $n = 6$ in der 3-Spalte die Minutenanzeige 2, die Sekundenanzeige 0 und die Ganzzahlbewertung $V_3(6) = 1$. Die harmonische Bewertung ist hingegen $v_3(H_6) = 0$, denn $H_6 = 49/20$.

Für eine feste Primzahl p definieren wir

$$k = \ell_p(n) = \max\{a \geq 0 : p^a \leq n\}, \qquad X_p(n) = p^k H_n.$$

Jeder Nenner $j \leq n$ enthält höchstens k Faktoren p. Deshalb besitzt $X_p(n)$ nach Kürzung einen zu p teilerfremden Nenner. Sein modularer Wert ist also definiert. Die folgende Tabelle trennt die Größen. Die Genauigkeit heißt hier d, damit sie nicht mit dem Sekundenzähler $R_p(n)$ verwechselt wird; in früheren Fassungen hieß sie R.

Zeichen	Bedeutung	Beispiel $p = 3, n = 6$
k	Exponent des Skalierungsfaktors	1
$X_p(n)$	Exakte Größe, deren modularen Wert wir berechnen	$3H_6$
d	Anzahl der gespeicherten Ziffern zur Basis p	2
$Q = p^d$	Modulus der Rechnung	9
x	Gespeicherter Rest von $X_p(n)$, $0 \leq x < Q$	6
$v_p(H_n)$	Gesuchter Exponent in der harmonischen Tabelle	0

Wie ein Bruch modulo Q berechnet wird. Ist der Nenner b zu p teilerfremd, finden wir eine ganze Zahl c mit $bc \equiv 1 \pmod{Q}$ und setzen $a/b \equiv ac \pmod{Q}$. Beispielsweise gilt $2^{-1} \equiv 2 \pmod 3$, weil $2 \cdot 2 = 4 \equiv 1 \pmod 3$. Modulo 9 gilt stattdessen $2^{-1} \equiv 5$, weil $2 \cdot 5 = 10 \equiv 1 \pmod 9$. Dieses Inverse lässt sich durch den erweiterten euklidischen Algorithmus aus b und Q berechnen; eine Primfaktorzerlegung von b ist nicht nötig. Auch eine kleine Kehrwerttabelle für den gewählten Modulus genügt.

Ein bekannter Bewertungsexponent allein bestimmt diesen Rest nicht. Die Zahlen 1 und 2 haben beide $v_3 = 0$, aber verschiedene Reste modulo 3. Für die Addition ist das entscheidend: $1 + 1 \equiv 2$, während $1 + 2 \equiv 0 \pmod 3$. Die Summe kann also einen neuen Dreierfaktor erhalten, obwohl die Bewertungen aller Summanden null sind.

Der direkte Bezug zu p-adischen Zahlen. Der Rest $x \equiv X_p(n) \pmod{p^d}$ enthält genau die ersten d Ziffern der p-adischen Entwicklung der p-ganzen Zahl $X_p(n)$. Die erste von null verschiedene Ziffer bestimmt ihre Bewertung. Wir verwenden damit endliche p-adische Genauigkeit, wie sie auch der Rechnung von Boyd (1994, §5.1) zugrunde liegt. Für die hier beschriebenen Schritte werden ausschließlich rationale Zahlen und endliche Restklassen benötigt; eine unendliche Entwicklung oder der Übergang zur Vervollständigung $\mathbb{Q}_p$ ist nicht erforderlich.

7.2 Von der ersten Zeile zur sechsten

Zeile 1: Wir berechnen H_1 modulo 3. Aus $H_1 = 1$ folgt der gespeicherte Rest 1 und die Ausgabe $v_3(H_1) = 0$.

Zeile 2: Wir berechnen die Summe $H_2 = H_1 + 1/2$ modulo 3, nicht den Index 2 modulo 3:

$$H_2 \equiv 1 + 2 \equiv 0 \pmod 3.$$

Dieser Rest sagt, dass der gekürzte Zähler durch 3 teilbar ist. Er bestimmt noch nicht die Anzahl der Dreierfaktoren. Wir berechnen deshalb dieselbe Summe modulo 9:

$$H_2 \equiv 1 + 5 = 6 \pmod 9.$$

Der Rest 6 hat genau einen Dreierfaktor. Weitere Ziffern ändern ihn nur um ein 9-faches einer 3-ganzen Zahl und können diesen Faktorenzähler nicht ändern. Somit ist die Ausgabe $v_3(H_2) = 1$. Die beiden bekannten Summanden liefern die Basisrechnung; der fertig gekürzte Bruch $3/2$ wird nicht als Eingabe benötigt.

Zeile 3: Nun kommt $1/3$ hinzu. Der Nenner 3 ist modulo 9 nicht invertierbar. Wir berechnen deshalb $3H_3 = 3H_2 + 1$ modulo 9:

$$3H_3 \equiv 3 \cdot 6 + 1 \equiv 1 \pmod 9.$$

Die Bewertung der skalierten Summe ist null. Für die Ausgabe ziehen wir den Skalierungsexponenten 1 ab und erhalten $v_3(H_3) = -1$.

Zeile	Berechnete Größe	Rechnung	Modulus	Ausgabe $v_3(H_n)$
1	H_1	1	3	0
2	H_2	$1 + 2 \equiv 0$	3	offen
2	H_2	$1 + 5 \equiv 6$	9	1
3	$3H_3$	$3 \cdot 6 + 1 \equiv 1$	9	-1
4	$3H_4$	$1 + 3 \cdot 7 \equiv 4$	9	-1
5	$3H_5$	$4 + 3 \cdot 2 \equiv 1$	9	-1
6	$3H_6$	$1 + 5 \equiv 6$	9	0

In Zeile 4 ist 7 das Inverse des neuen Nenners 4 modulo 9; in Zeile 5 ist 2 das Inverse von 5. In Zeile 6 wird auf der Skala 3 der neue Term $3/6 = 1/2$ addiert. Die unabhängigen Kontrollwerte sind $1, 3/2, 11/6, 25/12, 137/60, 49/20$.

Der Schritt $5 \to 6$, nur modulo 3. Dieser Schritt zeigt besonders direkt, weshalb keine andere Primzahlspalte gebraucht wird. Wir kennen $3H_5 \equiv 1 \pmod 3$. Der eigene Ganzzahlzähler liefert $6 = 3 \cdot 2 + 0$. Nach Entfernen eines Dreierfaktors bleibt im neuen Nenner die ganze Zahl 2:

$$3H_6 = 3H_5 + \frac{3}{6} = 3H_5 + \frac{1}{2} \equiv 1 + 2 \equiv 0 \pmod 3.$$

Die Zahl 2 wird hier als Nenner benutzt; die *Primzahlspalte für* 2 wird nicht abgefragt. Ihre modulare Inverse gehört zur Rechnung in der 3-Spalte. Der Nullrest reicht zum Fortschreiben der modularen Folge, aber nicht zum Ablesen der exakten Bewertung. Die obige Rechnung modulo 9 liefert dazu die fehlende Information.

7.3 Die allgemeine Taktregel und ihre Eingaben

Sei $j = n + 1$ die neue Zeile. Entferne durch wiederholte Division nur die Faktoren der fest gewählten Primzahl:

$$j = p^e u, \qquad p \nmid u.$$

In der Uhrwerkdarstellung folgt man dafür bei Sekundenrest null jeweils der eigenen Minutenadresse. Die Anzahl solcher Divisionen ist e; der verbleibende Index ist u. Dessen übrige Primfaktoren werden nicht benötigt. Setze $k = \ell_p(j)$ und $\Delta = \ell_p(j) - \ell_p(j-1)$. Dann gilt exakt

$$X_p(j) = p^{\Delta} X_p(j-1) + \frac{p^{k-e}}{u}. \tag{11}$$

Dies folgt durch Multiplikation von $H_j = H_{j-1} + 1/j$ mit p^k. Bei einer neuen Potenz von p ist $\Delta = 1$, sonst $\Delta = 0$. Modulo $Q = p^d$ wird daher aus dem alten gespeicherten Rest x_{alt} der neue Rest

$$x_{\text{neu}} = \left(p^{\Delta} x_{\text{alt}} + p^{k-e} u^{-1}\right) \bmod Q. \tag{12}$$

Das Inverse wird aus u und Q berechnet. Alle Größen in (12) sind durch den gemeinsamen Index und den Zustand der fest gewählten p-Spalte bestimmt.

Lemma 7.1 (Ablesen einer Bewertung aus einem nichtnull Rest)**.** *Sei x der ganzzahlige Rest von $X_p(n)$ modulo p^d. Ist $x \neq 0$, dann gilt exakt*

$$v_p(H_n) = v_p(x) - \ell_p(n).$$

Bei $x = 0$ folgt zunächst nur $v_p(H_n) \geq d - \ell_p(n)$.

Beweis. Es ist $X_p(n) = x + p^d z$ mit $z \in \mathbb{Z}_{(p)}$. Für $0 < x < p^d$ gilt $v_p(x) < d$, während $v_p(p^d z) \geq d$. Lemma 5.2 liefert $v_p(X_p(n)) = v_p(x)$. Bei $x = 0$ bleibt nur die untere Schranke. In beiden Fällen wird anschließend der Skalierungsexponent abgezogen. □

7.4 Genauigkeit aus der eigenen Zeilenhistorie

Lemma 7.2 (Die Minutenadresse)**.** *Für $j = pm + r \geq p$, $0 \leq r < p$ und $k = \ell_p(j)$ gilt*

$$X_p(j) = X_p(m) + p^k U_p(m, r), \qquad U_p(m, r) = \sum_{\substack{1 \leq a \leq pm+r \\ p \nmid a}} \frac{1}{a}. \tag{13}$$

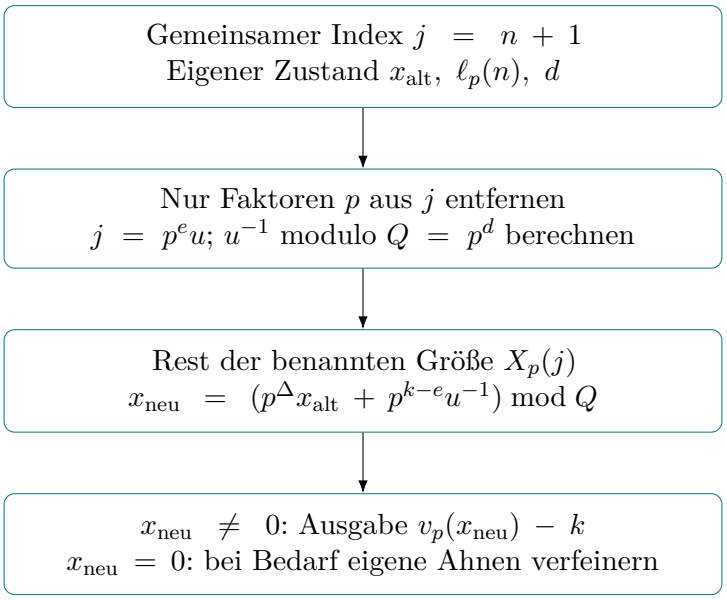

Abbildung 5: Informationsfluss innerhalb einer fest gewählten Primzahlspalte. Die Hilfsgrößen sind keine zusätzlichen Primzahlspalten. $k = \ell_p(j)$, $\Delta = \ell_p(j) - \ell_p(j-1)$. Zur Verfeinerung dürfen frühere Zeilen derselben Spalte herangezogen werden.

Beweis. Die durch p teilbaren Nenner tragen H_m/p zu H_j bei. Außerdem ist $\ell_p(m) = k-1$, denn $p^k \le j < p^{k+1}$ impliziert $p^{k-1} \le m < p^k$. Multiplikation mit p^k liefert (13). □

Um $X_p(j)$ modulo p^d zu berechnen, benötigen wir $X_p(m)$ modulo p^d. Falls $d \le k$, verschwindet die gesamte Korrektur modulo p^d. Andernfalls genügt der Rest von $U_p(m, r)$ modulo p^{d-k}. Fehlt der Elternzeile die verlangte Genauigkeit, folgen wir wiederum ihrer Minutenadresse. Die Kette

$$j \longrightarrow \lfloor j/p \rfloor \longrightarrow \lfloor j/p^2 \rfloor \longrightarrow \cdots$$

endet bei einem Index unterhalb von p. Dort liefern weniger als p bekannte Summanden den Basiswert. Bereits genügend genaue Reste werden wiederverwendet. Eine bloße Änderung der Modulusangabe an einem alten Rest liefert keine zusätzlichen Ziffern.

Zeile 7 ohne Wiederholung der Zeilen 3 bis 6. Aus Zeile 6 kennen wir $3H_6 \equiv 6 \pmod 9$. Wegen $7^{-1} \equiv 4 \pmod 9$ gilt

$$3H_7 = 3H_6 + 3/7 \equiv 6 + 3 \cdot 4 \equiv 0 \pmod 9.$$

Die genaue Bewertung bleibt offen. Wir berechnen nun dieselbe Größe $3H_7$ modulo 27. Die Minutenadresse ist $7 = 3 \cdot 2 + 1$, also $7 \to 2$. Mit

$$U = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \quad \text{gilt exakt} \quad 3H_7 = H_2 + 3U.$$

Wir berechnen H_2 modulo 27 und U modulo 9:

$$H_2 \equiv 1 + 14 = 15 \pmod{27}, \qquad 2 \cdot 14 \equiv 1 \pmod{27},$$
$$U \equiv 1 + 5 + 7 + 2 + 4 \equiv 1 \pmod 9.$$

Die zweite Zeile benutzt die Inversen der ausdrücklich genannten Nenner $1, 2, 4, 5, 7$. Folglich

$$3H_7 \equiv 15 + 3 \cdot 1 = 18 \pmod{27}, \qquad v_3(H_7) = v_3(18) - 1 = 1.$$

Die Kenntnis von U modulo 9 reicht, weil Multiplikation mit 3 einen Fehler aus $9\mathbb{Z}_{(p)}$ in $27\mathbb{Z}_{(p)}$ überführt. Es wurden keine anderen Primzahlspalten benutzt. Bei diesem kleinen Beispiel wurde die Korrektur ausgeschrieben; der nächste Abschnitt zeigt, wie sie bei großen Indizes ohne langen Summendurchlauf ausgewertet wird.

n	k	d	$Q = 3^d$	Rest x von $3^k H_n$	Ausgabe $v_3(H_n)$
1	0	1	3	1	0
2	0	2	9	6	1
3	1	2	9	1	−1
4	1	2	9	4	−1
5	1	2	9	1	−1
6	1	2	9	6	0
7	1	3	27	18	1
8	1	3	27	15	0
9	2	3	27	19	−2

Hier wird d bei Bedarf um eins erhöht und anschließend beibehalten. Zeile 8 berechnet $3H_8 \equiv 18 + 3 \cdot 17 \equiv 15 \pmod{27}$, da $8^{-1} \equiv 17$. Bei Zeile 9 ändert sich die Skala: $9H_9 = 3(3H_8) + 1 \equiv 19 \pmod{27}$. Die Skalierung ändert sich an Primzahlpotenzen; die Genauigkeit ändert sich, wenn der Rest zur Bestimmung der Bewertung nicht ausreicht. Unter dieser Strategie braucht Zeile 22 den Modulus 81, mit Ahnen $22 \to 7 \to 2$.

7.5 Endlicher Auswerter ohne Wiederholung des Präfixes

Lemma 7.3 (Potenzsummen-Auswertung)**.** *Sei $L \geq 1$ und $S_h(m) = \sum_{b=0}^{m-1} b^h$, mit $b^0 = 1$ auch bei $b = 0$. Dann*

$$U_p(m, r) \equiv \sum_{c=1}^{p-1} \sum_{h=0}^{L-1} (-p)^h c^{-h-1} S_h(m) + \sum_{c=1}^{r} (pm + c)^{-1} \pmod{p^L}. \tag{14}$$

Alle inversen Potenzen sind modulo p^L definiert. Die benötigten Potenzsummen lassen sich endlich auswerten durch

$$S_h(m) = \sum_{a=0}^{h} \left\{ {h \atop a} \right\} a! \binom{m}{a+1}. \tag{15}$$

Beweis. Die nicht durch p teilbaren Nenner sind $pb + c$ mit $0 \leq b < m$, $1 \leq c < p$, zuzüglich $pm + c$ für $1 \leq c \leq r$. Die endliche geometrische Identität liefert

$$\frac{1}{c + pb} \equiv \sum_{h=0}^{L-1} (-p)^h b^h c^{-h-1} \pmod{p^L},$$

denn ihr Rest besitzt einen Faktor p^L und einen zu p teilerfremden Nenner. Summieren gibt (14).

Die Zahlen $\left\{ {h \atop a} \right\}$ sind die Stirling-Zahlen zweiter Art. Man kann sie durch $\left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1$, Null außerhalb $0 \le a \le h$, und die Rekursion

$$\left\{ {h+1 \atop a} \right\} = a \left\{ {h \atop a} \right\} + \left\{ {h \atop a-1} \right\}$$

definieren. Induktion mit $b\,b(b-1)\cdots(b-a+1) = b(b-1)\cdots(b-a)+a\,b(b-1)\cdots(b-a+1)$ ergibt $b^h = \sum_a \left\{ {h \atop a} \right\} a! \binom{b}{a}$. Schließlich teleskopiert Pascals Identität zu $\sum_{b=0}^{m-1} \binom{b}{a} = \binom{m}{a+1}$. Damit folgt (15). □

7.6 Das Autonomieprinzip

Satz 7.4 (Eine gewählte Spalte genügt)**.** *Seien p eine fest gewählte Primzahl und N eine endliche positive ganze Zahl. Die exakten Werte $v_p(H_n)$ für $1 \le n \le N$ lassen sich durch die Taktregel (12), adaptive Genauigkeit und die Minutenrekursion (13) berechnen. Benötigt werden der gemeinsame Zeilenindex, Zustände und frühere Zeilen derselben p-Spalte sowie endliche ganzzahlige und modulare Arithmetik. Weder Bewertungen zu anderen Primzahlen noch vollständige reduzierte Zähler und Nenner der H_n sind erforderlich.*

Beweis. Der Startwert ist $X_p(1) = 1$. Für den gewöhnlichen Takt werden e und u durch wiederholte Division des neuen Index durch p bestimmt. Da $p \nmid u$, ist u modulo jeder Potenz von p invertierbar. Formel (12) berechnet daher den richtigen nächsten Rest aus dem alten Rest, ohne Bewertungen anderer Primzahlen.

Bei fehlender Genauigkeit berechnet Lemma 7.2 den Rest aus dem kleineren Index $\lfloor n/p \rfloor$ derselben Spalte und einer Korrektur. Lemma 7.3 wertet diese Korrektur mit endlichen Potenzsummen und modularen Inversen aus. Die Adresskette ist endlich. Da $X_p(n)$ eine positive rationale Zahl ist, ist $v_p(X_p(n))$ endlich. Für jedes $d > v_p(X_p(n))$ ist der Rest ungleich null, und Lemma 7.1 liefert die exakte Ausgabe. Wiederholtes Erhöhen von d endet also für jede feste Zeile. Endlich viele Zeilen ergeben den behaupteten endlichen Algorithmus. □

Was Autonomie hier bedeutet. Eine Spalte hat ihren eigenen Zustand und gegebenenfalls ihre eigene Zeilenhistorie. Sie muss nicht gedächtnislos sein. Bei festem Modulus kann sie ihre Restfolge beliebig weit fortschreiben, doch Nullreste reichen nicht immer zur Bestimmung der exakten Bewertungen. Die adaptive Rechnung verspricht weder konstante Laufzeit noch eine feste Speichergröße. Die Berechnung für ein gewähltes p entdeckt außerdem nicht automatisch alle neuen Zählerprimzahlen; etwa 137 bei H_5 kann größer als der Index sein.

Kompakter Pseudocode für die 3-Spalte. Algorithmus 1 verwendet dieselben Bezeichner wie die Herleitung: $\ell_3(n) = \max\{a \ge 0 : 3^a \le n\}$, $X_3(n) = 3^{\ell_3(n)} H_n$, Genauigkeit d und Modulus $Q = 3^d$. Der dauerhafte Zustand ist (n, k, d, x), wobei x den Rest von $X_3(n)$ bezeichnet. S_h steht für die exakte Potenzsumme $S_h(m)$ aus Lemma 7.3; die lokale Variable U speichert den Rest von $U_3(m, r)$ modulo $M = 3^L$. $\mathrm{INV}(a, Q)$ ist das modulare Inverse,

Algorithmus 1 Autonome 3-Spalte ohne erneuten Präfixdurchlauf

Require: Endlicher Endindex $N \geq 1$

function REST(n, d) ▷ Rest von $X_3(n)$ modulo 3^d
  $Q \leftarrow 3^d$
  if $n < 3$ **then**
    return $\left(\sum_{j=1}^{n} \mathrm{INV}(j, Q)\right) \bmod Q$
  end if
  $k \leftarrow \ell_3(n); \quad (m, r) \leftarrow \mathrm{divmod}(n, 3)$
  $z \leftarrow$ REST(m, d) ▷ Nur eigene Ahnenzeile
  if $d \leq k$ **then**
    return z
  end if
  $L \leftarrow d - k; \quad M \leftarrow 3^L; \quad S_0 \leftarrow m$
  for $h = 1, \ldots, L-1$ **do**
    $S_h \leftarrow \dfrac{m^{h+1} - \sum_{t=0}^{h-1} \binom{h+1}{t} S_t}{h+1}$
    Exakte ganzzahlige Division, keine modulare Division.
  end for
  $U \leftarrow \Big(\sum_{c=1}^{2} \sum_{h=0}^{L-1} (-3)^h \,\mathrm{INV}(c, M)^{h+1} S_h + \sum_{c=1}^{r} \mathrm{INV}(3m + c, M)\Big) \bmod M$
  return $(z + 3^k U) \bmod Q$
end function

procedure DREIERSPALTE(N)
  $(n, k, d, x) \leftarrow (1, 0, 1, 1)$
  Ausgabe $(n, k, d, x,\ v_3(H_n) = 0)$
  while $n < N$ **do**
    $j \leftarrow n + 1; \quad k_{\mathrm{neu}} \leftarrow \ell_3(j); \quad (e, u) \leftarrow (0, j)$
    while $u \bmod 3 = 0$ **do**
      $(e, u) \leftarrow (e + 1, u/3)$
    end while
    $Q \leftarrow 3^d$
    $y \leftarrow (3^{k_{\mathrm{neu}} - k} x + 3^{k_{\mathrm{neu}} - e} \,\mathrm{INV}(u, Q)) \bmod Q$
    while $y = 0$ **do**
      $d \leftarrow d + 1; \quad y \leftarrow$ REST(j, d)
    end while
    $(n, k, x) \leftarrow (j, k_{\mathrm{neu}}, y)$
    Ausgabe $(n, k, d, x,\ v_3(H_n) = v_3(x) - k)$
  end while
end procedure

und divmod$(n, 3)$ liefert Quotient und Rest. Leere Summen sind null. Alle Variablen der Funktion Rest sind lokal; ihre Rekursion verändert den Zustand der Hauptschleife nicht.

Die Potenzsummen-Rekursion folgt aus dem Teleskopieren von $(b+1)^{h+1} - b^{h+1}$ für $b = 0, \ldots, m-1$. Die Verfeinerung folgt nur $n \to \lfloor n/3 \rfloor \to \cdots$ und wiederholt keine vorhergehenden +1-Schritte. Zur kompakten Darstellung ist hier kein Cache vorgesehen; genügend genaue Ahnenreste können zusätzlich gespeichert und wiederverwendet werden. Die übrigen Primzahlspalten werden in beiden Varianten nicht abgefragt.

7.7 Ein erstes Muster: die führende Ziffer des Index

Die Autonomie erlaubt, einzelne Spalten gezielt zu untersuchen. Ein einfaches exaktes Muster folgt schon aus der niedrigsten gespeicherten Ziffer. Das Argument ist eng mit Kamano (2011, Proposition 4(i), S. 3–4) verwandt; dort werden auch verallgemeinerte harmonische Zahlen behandelt.

Lemma 7.5 (Führende Indexziffer und erster Rest)**.** *Sei $p^k \le n < p^{k+1}$ und $a = \lfloor n/p^k \rfloor \in \{1, \ldots, p-1\}$. Dann gilt*

$$X_p(n) = p^k H_n \equiv H_a \pmod{p}. \tag{16}$$

Die Zahl a ist die führende Ziffer von n in Basis p.

Beweis. Die Nenner mit genau k Faktoren p sind $p^k, 2p^k, \ldots, ap^k$. Ihre Beiträge zu $p^k H_n$ ergeben H_a. Jeder übrige Nenner hat weniger als k Faktoren p; sein skalierter Kehrwert ist deshalb ein p-faches einer p-ganzen Zahl und trägt modulo p null bei. Bei $k = 0$ gibt es keine übrigen Nenner. Damit gilt die Formel in allen Fällen. □

Bei $p = 2$ ist die führende Ziffer immer 1. Somit ist $X_2(n) \equiv H_1 = 1 \pmod 2$: Ein Bit reicht für jede Ausgabe, und Satz 5.3 folgt erneut.

Bei $p = 3$ gibt es zwei Fälle, denn $H_1 \equiv 1$ und $H_2 = 3/2 \equiv 0 \pmod 3$:

$$X_3(n) \equiv \begin{cases} 1 \pmod 3, & 3^k \le n < 2 \cdot 3^k, \\ 0 \pmod 3, & 2 \cdot 3^k \le n < 3^{k+1}. \end{cases}$$

Im ersten Bereich ist $v_3(H_n) = -k$ bereits exakt bestimmt. Im zweiten wissen wir zunächst nur $v_3(H_n) \ge 1 - k$. Ein Nullrest bezeichnet zusätzliche Teilbarkeit der skalierten Summe, nicht die Zahl null. Die Werte im zweiten Bereich können verschieden sein: Bei $n = 6, 7, 8$ lauten die Bewertungen $0, 1, 0$.

k	Führende Ziffer 1: Rest 1	Führende Ziffer 2: Rest 0
0	$n = 1$	$n = 2$
1	$n = 3, 4, 5$	$n = 6, 7, 8$
2	$n = 9, \ldots, 17$	$n = 18, \ldots, 26$
3	$n = 27, \ldots, 53$	$n = 54, \ldots, 80$

Auch bei $p = 5$ ist die erste Aufteilung direkt berechenbar: Die Reste von H_1, H_2, H_3, H_4 modulo 5 sind $1, 4, 1, 0$. Eine führende Indexziffer 1, 2 oder 3 liefert daher bereits $v_5(H_n) =$

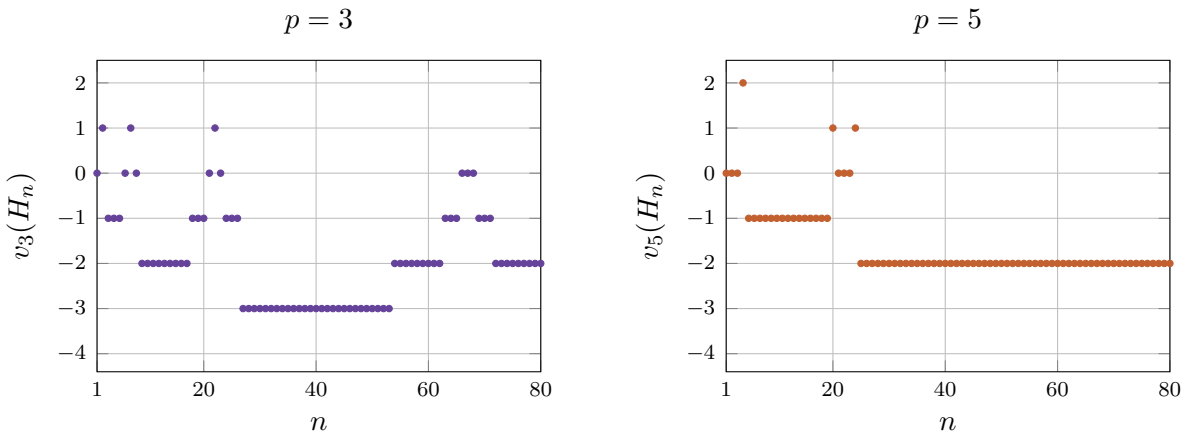

Abbildung 6: Die getrennt berechneten harmonischen Spalten für $p = 3$ und $p = 5$, jeweils für $n = 1, \ldots, 80$. Die waagerechte Achse zeigt den Index n, die senkrechte die exakte Primzahlbewertung von H_n. Die Punkte sind keine Größenapproximationen der Summen. Die zusammenhängenden Bereiche mit gleicher Bewertung motivieren die Untersuchung von Indexziffern und höherer modularer Genauigkeit.

$-k$; bei führender 4 ist zusätzliche Genauigkeit erforderlich. Diese Regeln liefern einen arithmetisch erklärten Ausgangspunkt für die Suche nach feineren Mustern.

Die vollständige 3-Bewertung wird bereits durch die Basis-3-Ziffern beschrieben: siehe Kamano (2011, Theorem 2(i), Tabelle 1, S. 2). Unsere einfache Zweiteilung ist eine erste, gröbere Sicht darauf. Die Darstellung als autonome Spalte macht die folgenden Arbeitsfragen konkret: Welche Indexziffern bestimmen die nächste Restziffer? Wo tritt zusätzliche Teilbarkeit auf? Wie viel Genauigkeit braucht eine exakte Ausgabe? Welche Eigenschaften der 3-Spalte finden sich auch bei 5, 7 oder weiteren Primzahlen? Für jede solche Untersuchung können wir endliche, überprüfbare Spalten erzeugen und vermutete Muster anschließend beweisen. Ein endlicher Plot allein beweist keine Regel für alle Indizes.

7.8 Vergleich mit den Dreieckszahlen

Um die Informationsanforderungen einer harmonischen Spalte einzuordnen, vergleichen wir sie mit einer einfacheren endlichen Summe. Wir verwenden die Indexkonvention

$$T_N = \sum_{j=0}^{N-1} j = \frac{N(N-1)}{2} \qquad (N \geq 1).$$

Damit sind $T_2 = 1$, $T_3 = 3$ und $T_4 = 6$. Die übliche Summe bis einschließlich N ist dagegen T_{N+1}. Die Produktform folgt durch Paaren der Summanden: $2T_N = \sum_{j=0}^{N-1}(j+(N-1-j)) = N(N-1)$. Da $T_1 = 0$ keinen endlichen Primzahlvektor besitzt, betrachten wir seine Bewertungen erst ab $N = 2$.

Warum die Dreieckszahlen leichter sind. Wie zuvor bezeichnet $V_p(n)$ die Bewertung der positiven ganzen Zahl n. Für die Summe setzen wir $\tau_p(N) = v_p(T_N)$ und $\delta_{p,2} = 1$ für $p = 2$, sonst $\delta_{p,2} = 0$.

Satz 7.6 (Eine Summenspalte aus zwei Ganzzahlzeilen)**.** *Für jede Primzahl p und $N \geq 2$ gilt*

$$\tau_p(N) = V_p(N) + V_p(N-1) - \delta_{p,2}, \tag{17}$$
$$\tau_p(N+1) = \tau_p(N) + V_p(N+1) - V_p(N-1). \tag{18}$$

Für $m \geq 1$ erhält man die Paarstruktur

$$\tau_p(pm) = \tau_p(pm+1) = 1 + V_p(m) - \delta_{p,2}.$$

Insbesondere

$$\boxed{\tau_2(2m) = \tau_2(2m+1) = V_2(m).}$$

Beweis. Die erste Formel folgt aus $T_N = N(N-1)/2$ durch Addition der Faktorenbewertungen. Subtraktion dieser Formel für zwei benachbarte Indizes ergibt die zweite. In den beiden Produkten $(pm)(pm-1)/2$ und $(pm+1)(pm)/2$ trägt jeweils nur der Faktor pm zur p-Bewertung bei; die beiden Nachbarn sind nicht durch p teilbar. Daher entstehen dieselben Ausgabewerte in den Zeilen pm und $pm+1$. □

Die 2-Spalte der Dreieckszahlen ist also die Ganzzahlspalte $0, 1, 0, 2, 0, 1, 0, 3, \ldots$ mit jedem Eintrag zweimal: $0, 0, 1, 1, 0, 0, 2, 2, \ldots$. Dieser Dreieckszahlbezug ist ausdrücklich in OEIS Foundation (A050605, Kommentare und Formeln) dokumentiert; mit dem dortigen Index gilt $\tau_2(N) = \text{A050605}(N-2)$.

Zur autonomen Berechnung führen wir die eigenen Zähler $M_p(N) = \lfloor N/p \rfloor$ und $R_p(N) = N \bmod p$ fort. Die zugehörige Ganzzahlspalte erfüllt

$$V_p(N) = \begin{cases} 0, & R_p(N) \neq 0, \\ 1 + V_p(M_p(N)), & R_p(N) = 0. \end{cases}$$

Im zweiten Fall ist $M_p(N) < N$ eine bereits berechnete eigene Zeile. Anschließend liefert (17) den Summeneintrag. Frühere Zeilen müssen nicht erneut erzeugt werden; andere Primzahlspalten, vollständige Dreieckszahlen und modulare Inverse werden nicht benötigt. Die Ganzzahlrekursion für $p = 2$ steht auch in OEIS Foundation (A007814, Formel von Zumkeller, 11. August 2001).

Bei der harmonischen Summe ist dagegen $H_{N+1} = H_N + 1/(N+1)$ eine Addition ohne entsprechende Produktform. Die Bewertungen der Summanden allein entscheiden die Bewertung der Summe nicht immer: Bei $p = 3$ haben sowohl 1 als auch $1/2$ Bewertung null, aber $v_3(1 + 1/2) = 1$; bei $1 + 1 = 2$ bleibt die Bewertung null. Deshalb führt unser allgemeines harmonisches Update einen eigenen Restzustand zur skalierten Summe und gegebenenfalls höhere Genauigkeit mit.

Das ist keine Behauptung, dass jede mögliche Methode modulare Zustände benötigt. Für die harmonische 3-Spalte liefert Kamano (2011, Theorem 2(i), Tabelle 1, S. 2) eine explizite Beschreibung anhand der ternären Indexziffern. Die Aussage über die zusätzliche Information betrifft die hier verwendete allgemeine Update-Regel.

N	T_N	H_N	$\tau_2(N)$	$v_2(H_N)$
2	1	3/2	0	−1
3	3	11/6	0	−1
4	6	25/12	1	−2
5	10	137/60	1	−2
6	15	49/20	0	−2
7	21	363/140	0	−2
8	28	761/280	2	−3
9	36	7129/2520	2	−3

Die Tabelle trennt zwei Strukturen: $\tau_2(N) = V_2(\lfloor N/2 \rfloor)$ zeigt Teilbarkeitspaare, während $v_2(H_N) = -\ell_2(N)$ nur beim Überschreiten einer Zweierpotenz eine neue Stufe erreicht. Die zweite Identität und ihr Argument stehen auch bei Kamano (2011, S. 1, Beweis nach Theorem 1).

Harmonische Zuwächse und zweite Differenzen. Setzen wir zusätzlich $H_0 = 0$, so ist der erste Zuwachs

$$\Delta H_N := H_N - H_{N-1} = \frac{1}{N} \qquad (N \geq 1).$$

Die Zuwächse der beiden Summen sind somit reziprok: $T_{N+1} - T_N = N$ und $\Delta H_N = 1/N$. Ihre Bewertungen lauten $V_p(N)$ beziehungsweise $-V_p(N)$.

Satz 7.7 (Kehrwerte als zweite Differenzen)**.** *Definiere die zweite rückwärts gerichtete Differenz durch* $\Delta^2 H_N := H_N - 2H_{N-1} + H_{N-2}$*. Für jedes* $N \geq 2$ *gilt*

$$\boxed{\frac{1}{T_N} = -2\Delta^2 H_N = 2\Big(\Delta H_{N-1} - \Delta H_N\Big).} \tag{19}$$

Damit gilt für jeden endlichen Endpunkt $N \geq 2$

$$\boxed{\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{T_n} = 2 - \frac{2}{N}.} \tag{20}$$

Beweis. Die harmonischen Zuwächse werden kleiner. Ihr Unterschied beträgt exakt

$$\Delta^2 H_N = \frac{1}{N} - \frac{1}{N-1} = -\frac{1}{N(N-1)} = -\frac{1}{2T_N}.$$

Dies beweist (19). Summieren der benachbarten Differenzen lässt alle inneren Zuwächse wegfallen:

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{T_n} = 2\sum_{n=2}^{N} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{N}\right).$$

□

Mit Worten: Der Kehrwert einer Dreieckszahl misst genau das Doppelte der Abnahme zweier aufeinanderfolgender harmonischer Zuwächse. Das Minuszeichen kommt daher, dass die zweite Differenz negativ ist. Es geht nicht um eine Näherung oder einen Grenzwert.

Für $N = 4$ lässt sich das vollständig ausschreiben:

$$\frac{1}{T_4} = \frac{1}{6} = -2\left(\frac{25}{12} - 2\frac{11}{6} + \frac{3}{2}\right), \qquad \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3} + \frac{1}{T_4} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{2}.$$

Die endliche Formel enthält bereits den genauen Abstand $2/N$ zum Wert 2. Die Teleskoprechnung selbst ist bekannt; eine ausdrücklich endliche Darstellung steht bei NRICH (o. J., Abschnitt *Student Solutions*), dort mit dem um eins verschobenen Dreieckszahlindex. Die Schreibweise mit $\Delta^2 H_N$ ist hier eine algebraische Umformung dieser Identität, keine Neuheitsbehauptung.

Ein gemeinsamer Wert an Primzahlpotenzen. Ein weiterer Querbezug führt direkt zur zuvor untersuchten harmonischen Spalte.

Korollar 7.8. *Für jede Primzahl p, jedes $k \geq 1$ und $N \in \{p^k, p^k + 1\}$ gilt*

$$\boxed{v_p(T_N H_N) = -\delta_{p,2}.}$$

Beweis. Satz 7.6 liefert $v_p(T_N) = k - \delta_{p,2}$. Für $p^k \leq N < 2p^k$ hat unter den Nennern $1, \ldots, N$ nur p^k die Bewertung k. Das eindeutige Minimum der Kehrwertbewertungen ergibt $v_p(H_N) = -k$. Diese Intervallaussage ist bereits der Spezialfall $m = 1$ von Kamano (2011, Proposition 4(ii), S. 3; Beweis S. 4). Beide gewählten Indizes liegen im Intervall. Addition der Faktorenbewertungen beweist die Behauptung. □

Für ungerades p bleibt im gekürzten Produkt weder im Zähler noch im Nenner ein Faktor p; für $p = 2$ bleibt genau ein Zweierfaktor im Nenner. Das kontrolliert nur diese eine Koordinate. Die Produktregel ist eine unmittelbare Folgerung aus der bekannten Intervallaussage und der Dreieckszahlformel.

Ist die Kehrwertregel bereits bekannt? Hier sind die bekannte Identität und ihre Darstellung durch harmonische Differenzen zu unterscheiden. Die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{T_N} = 2\left(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N}\right)$$

und die endliche Teleskopformel (20) sind ausdrücklich dokumentiert, etwa bei NRICH (o. J., Abschnitt *Student Solutions*). Die Quelle verwendet die Dreieckszahlen $n(n+1)/2$; ihr Index n entspricht hier $N - 1$.

Unsere Formulierung setzt lediglich $1/(N-1) = H_{N-1} - H_{N-2}$ und $1/N = H_N - H_{N-1}$ ein. Daraus entsteht genau

$$\frac{1}{T_N} = -2\Big(H_N - 2H_{N-1} + H_{N-2}\Big).$$

Für diese ausdrückliche Formulierung mit zweiten Differenzen wurde bei der gezielten Recherche am 20. Oktober 2026 keine eigene Fundstelle ermittelt. Daraus folgt kein Neuheitsanspruch: Die Gleichheit ergibt sich durch direktes Einsetzen aus den bekannten Identitäten. Ihr Nutzen für diese Untersuchung liegt darin, dass sie die Abnahme der harmonischen Zuwächse als Kehrwerte von Dreieckszahlen sichtbar macht.

Eine weitere konkrete Quelle ist Grzegrzolka und Meyer (2026): Abschnitt 1, *Telescoping Series Approach*, enthält die endliche Teleskoprechnung vor Gleichung (2); Abschnitt 2, Lemma 1, gibt eine entsprechende Differenzregel für Kehrwerte höherer Dreieckszahlen. Dieser Verweis belegt die Kehrwert- und Teleskoprechnung, nicht ausdrücklich die hier gewählte Schreibweise mit $\Delta^2 H_N$ und auch keine historische Erstentdeckung.

Die Einordnung lautet daher: *Die bekannte Kehrwertidentität der Dreieckszahlen wird hier als Beziehung zu den zweiten Differenzen der harmonischen Zahlen dargestellt.* Kamano bleibt die Referenz für die angegebenen Primzahlbewertungen; die Kehrwertidentität wird ihm nicht zugeschrieben.

7.9 Harmonische Differenzen: autonome Bewertungsspalten im +1-Takt

Die harmonischen Zuwächse und ihre Abnahmen lassen sich besonders einfach verfolgen. Ihre rationalen Werte und ihre Primzahlbewertungen besitzen jeweils eine multiplikative Rekursion. Das ist ein anderer Rechenschritt als die Addition der Zuwächse zur harmonischen Partialsumme. Wir beschreiben beide Ebenen ausdrücklich, damit die Vereinfachung und ihre Grenze sichtbar bleiben.

Was wird differenziert und was steht in der Spalte? Wir verwenden weiterhin $H_0 = 0$ und die rückwärts gerichtete Differenz

$$\Delta H_N = H_N - H_{N-1} = \frac{1}{N} \quad (N \geq 1).$$

Die zweite Differenz ist die Differenz dieser Zuwächse:

$$\Delta^2 H_N = \Delta H_N - \Delta H_{N-1} = -\frac{1}{N(N-1)} \quad (N \geq 2).$$

Das Zeichen Δ bezeichnet eine Differenz benachbarter Zeilen, keine Ableitung und keinen Grenzübergang. Weil die zweite Differenz negativ ist, erweitern wir die Bewertungsnotation auf nichtverschwindende rationale Zahlen durch $v_p(-q) = v_p(q)$. Das Vorzeichen wird getrennt vom Primzahlexponenten geführt.

Die Ganzzahlspalte bleibt $V_p(n) = v_p(n)$. Die drei folgenden Ausgabespalten sind davon zu unterscheiden:

$$\alpha_p(N) := v_p(\Delta H_N), \qquad \beta_p(N) := v_p(\Delta^2 H_N), \qquad \rho_p(N) := v_p(1/T_N).$$

Nur α_p ist schon für $N = 1$ definiert; β_p und ρ_p beginnen bei $N = 2$. Keine dieser drei Anzeigen ist $v_p(H_N)$ selbst.

Satz 7.9 (Bewertungen der ersten und zweiten Differenzen)**.** *Für jede Primzahl p gilt*

$$\begin{aligned} \alpha_p(N) &= -V_p(N) && (N \geq 1), \\ \beta_p(N) &= -V_p(N) - V_p(N-1) && (N \geq 2), \\ \rho_p(N) &= \delta_{p,2} + \beta_p(N) && (N \geq 2). \end{aligned}$$

Beim Übergang von N nach $N+1$ folgen die exakten Regeln

$$\alpha_p(N+1) = \alpha_p(N) + V_p(N) - V_p(N+1) \quad (N \geq 1), \tag{21}$$
$$\beta_p(N+1) = \beta_p(N) + V_p(N-1) - V_p(N+1) \quad (N \geq 2), \tag{22}$$
$$\rho_p(N+1) = \rho_p(N) + V_p(N-1) - V_p(N+1) \quad (N \geq 2). \tag{23}$$

Die Anfangswerte sind $\alpha_p(1) = 0$, $\beta_p(2) = -\delta_{p,2}$ und $\rho_p(2) = 0$.

Beweis. Die direkten Formeln folgen aus $\Delta H_N = 1/N$, $\Delta^2 H_N = -1/[N(N-1)]$ und $1/T_N = -2\Delta^2 H_N$. Für die Rekursionen kann man entweder benachbarte direkte Formeln subtrahieren oder die exakten rationalen Verhältnisse verwenden:

$$\Delta H_{N+1} = \Delta H_N \frac{N}{N+1}, \qquad \Delta^2 H_{N+1} = \Delta^2 H_N \frac{N-1}{N+1}.$$

Das zweite Verhältnis gilt auch für $q_N = 1/T_N$, also $q_{N+1} = q_N(N-1)/(N+1)$. Bewertungen übersetzen diese Multiplikationen und Divisionen in Addition und Subtraktion ganzer Exponenten. Die Anfangswerte folgen aus $\Delta H_1 = 1$, $\Delta^2 H_2 = -1/2$ und $q_2 = 1$. □

Welche Informationen benötigt der autonome Takt? Eine feste Primzahl p führt ihren eigenen Sekundenzähler $R = n \bmod p$, Minutenzähler $M = \lfloor n/p \rfloor$ und ihre Ganzzahlbewertungsgeschichte $V[j] = V_p(j)$. Bei einem Übertrag gilt $n = pM$ und daher $V[n] = 1 + V[M]$; andernfalls ist $V[n] = 0$. Die Minutenadresse $M < n$ verweist auf eine schon gespeicherte eigene Zeile.

Anschließend geben die direkten Formeln aus Satz 7.9 alle drei Differenzanzeigen aus. Algorithmus 2 verwendet diese Formeln, die algebraisch mit den angegebenen +1-Rekursionen übereinstimmen. Es ist kein Zugriff auf andere Primzahlspalten, keine modulare Inversion und kein erneuter Durchlauf durch frühere Zeilen nötig. Die Spalte speichert ihre eigene Geschichte; damit wird keine konstante Speichergröße behauptet.

Algorithmus 2 Eine autonome Primzahlspalte für harmonische Differenzen

Require: Primzahl p, endlicher Endindex $N \geq 1$
$n \leftarrow 1$, $M \leftarrow 0$, $R \leftarrow 1$, $V[1] \leftarrow 0$
$\delta \leftarrow 1$ für $p = 2$, sonst $\delta \leftarrow 0$
Ausgabe $(n = 1, \alpha = 0)$; β, ρ sind hier nicht definiert
while $n < N$ **do**
    $n \leftarrow n + 1$; $R \leftarrow R + 1$
    if $R = p$ **then**
        $R \leftarrow 0$; $M \leftarrow M + 1$
        $V[n] \leftarrow 1 + V[M]$ ▷ eigene bereits berechnete Zeile
    else
        $V[n] \leftarrow 0$
    end if
    $\alpha \leftarrow -V[n]$
    $\beta \leftarrow -V[n] - V[n-1]$
    $\rho \leftarrow \delta + \beta$
    Ausgabe (n, α, β, ρ)
end while

Hier ist R der Rest des *Zeilenindex* n modulo p. Es wird weder H_n noch ΔH_n modulo p gerechnet. Die Ausgaben α, β, ρ sind die jeweiligen *Bewertungsexponenten*. Die Korrektheit des Algorithmus folgt durch Induktion: Der Übertrag erhält $n = pM + R$, die Regel für $V[n]$ zählt genau die Faktoren p in n, und Satz 7.9 liefert daraus die drei Ausgaben.

Beispiel: die 3-Spalte. In der folgenden Tabelle ist jede Zeile ein endlicher Index. Die letzte Spalte zeigt zum Vergleich die Bewertung der vollständigen harmonischen Summe; sie wird *nicht* von Algorithmus 2 berechnet.

N	ΔH_N	$\Delta^2 H_N$	$\alpha_3(N)$	$\beta_3(N)$	$v_3(H_N)$
2	$1/2$	$-1/2$	0	0	1
3	$1/3$	$-1/6$	-1	-1	-1
4	$1/4$	$-1/12$	0	-1	-1
5	$1/5$	$-1/20$	0	0	-1
6	$1/6$	$-1/30$	-1	-1	0
7	$1/7$	$-1/42$	0	-1	1
8	$1/8$	$-1/56$	0	0	0
9	$1/9$	$-1/72$	-2	-2	-2

Für $p = 3$ ist $\rho_3(N) = \beta_3(N)$, weil der Faktor 2 keine Dreierbewertung beiträgt. Für $p = 2$ gilt dagegen $\rho_2(N) = \beta_2(N) + 1$.

Beim Schritt $N = 4 \to 5$ lautet die zweite Differenz zunächst $-1/12$ mit $\beta_3(4) = -1$. Die Rekursion liest $V_3(3) = 1$ und $V_3(5) = 0$:

$$\beta_3(5) = -1 + 1 - 0 = 0.$$

Das stimmt mit $\Delta^2 H_5 = -1/20$ überein. Die beiden Differenzen haben verschiedene Nenner, doch der Takt benötigt nur die angegebenen Einträge der eigenen Ganzzahlspalte.

Was vereinfacht sich beim Übergang zu H_N? Aus den Differenzen lässt sich die Summe exakt zurückgewinnen:

$$\Delta H_N = \Delta H_{N-1} - \frac{q_N}{2}, \qquad H_N = H_{N-1} + \Delta H_N.$$

Das sind Additionen. Ihre Bewertungen sind bei ungleichen Summandenbewertungen durch das Minimum bestimmt. Bei gleichen Bewertungen muss dagegen zusätzliche Information über die Summanden vorliegen. Zum Beispiel

$$H_7 = \frac{49}{20} + \frac{1}{7} = \frac{363}{140}.$$

Beide Summanden haben 3-Bewertung null, ihre Summe aber Bewertung eins. Hingegen haben die Summanden und die Summe in $1 + 1 = 2$ jeweils 3-Bewertung null. Die beiden Eingangsexponenten allein bestimmen die Bewertung einer Summe daher nicht.

Die leichten Differenzspalten ergeben somit *noch keine allgemeine Regel, die den Restzustand des harmonischen Updates ersetzt*. Sie liefern eine exakt berechenbare Hilfs- und Kontrollstruktur. Die direkte Formel $\beta_p(N) = -V_p(N) - V_p(N-1)$ zeigt zudem, dass sie aus der schon verfügbaren Ganzzahlspalte gewonnen wird. Die Schwierigkeit zusätzlicher Kürzungen bleibt bei der Addition zur vollständigen Partialsumme.

Literarische Einordnung. Die Formeln dieses Unterkapitels werden direkt aus den bekannten endlichen Identitäten hergeleitet; es wird keine Neuheit beansprucht. Zur Kehrwert- und Teleskoprechnung siehe NRICH (o. J., *Student Solutions*) und Grzegrzolka und Meyer (2026, Abschnitt 1; Abschnitt 2, Lemma 1). Diese Quellen werden nicht als Beleg für genau den hier formulierten Zustandsalgorithmus verwendet. Für die Ganzzahlspalte zu 2 siehe OEIS Foundation (A007814, rekursive Formel von Zumkeller). Zur Bewertung der *vollständigen* harmonischen Summe gibt Kamano (2011, Theorem 2(i), Tabelle 1, S. 2) eine eigenständige Beschreibung der 3-Spalte anhand ternärer Indexziffern; diese ist von unseren Differenzspalten zu unterscheiden.

8 Was die Primzahlkoordinate leistet und was nicht

Die rationalen Bewertungen beschreiben Faktoren und Kürzungen exakt. Sie sind keine gewöhnlichen Größenmaße. Das lässt sich bereits an $Z_N(1)$ und $Z_N(2)$ sehen: Ein eindeutig tiefster Summand liefert in beiden Fällen eine fallende Zweier-Treppe, obwohl nur die zweite Folge konvergiert.

Satz 8.1 (Gemeinsame Treppe für reziproke Potenzen)**.** *Sei $s = a/b > 0$ rational. In einem Zahlkörper, der die endlich vielen Zahlen n^{-s} für $1 \le n \le N$ enthält, wähle eine Erweiterung w_2 der Zweierbewertung, normiert durch $w_2(2) = 1$. Dann gilt*

$$w_2(Z_N(s)) = -s\lfloor \log_2 N \rfloor.$$

Dies gilt für jede solche Erweiterung.

Beweis. Aus $(n^{-s})^b = n^{-a}$ folgt $w_2(n^{-s}) = -s\, v_2(n)$. Unter den Indizes $1, \dots, N$ hat nur 2^k, $k = \lfloor \log_2 N \rfloor$, die maximale Zweierbewertung k. Deshalb ist $-sk$ das eindeutige Minimum der Summandenbewertungen.

Eine nichtarchimedische Bewertung erfüllt $w(x+y) \ge \min(w(x), w(y))$. Sind die beiden Werte verschieden, muss Gleichheit gelten: Andernfalls widerspräche die Anwendung derselben Ungleichung auf $x = (x+y) - y$ der kleineren Bewertung von x. Durch Gruppierung der übrigen Summanden folgt das Prinzip des eindeutigen Minimums auch hier und damit die Behauptung. □

Für positive ganzzahlige Exponenten steht die Treppenformel bereits bei Kamano (2011, S. 2, Absatz vor Theorem 2). Für $s = 1, 2$ genügt die gewöhnliche rationale Bewertung; der Hauptteil benötigt also keine Erweiterung. Für $s = 1/2$ ist $w_2(\sqrt{2}) = 1/2$. Die Existenz der benötigten Bewertungserweiterung wird durch Chevalleys Erweiterungssatz begründet; siehe Engler und Prestel (2005, §3.1, S. 57–58, Theorem 3.1.1). Diese Quelle stützt den Erweiterungsschritt zu den Radikalen. Die rationalen Spalten zuvor wurden direkt durch Teilbarkeit und endliche Rekursionen behandelt. Er behauptet nicht, dass eine Summe von Wurzeln einen gewöhnlichen rationalen Primzahlvektor besitzt. Die drei Koordinaten sind $-k/2, -k, -2k$.

Für diese spezielle Familie kann man aus $k = -w_2(Z_N(s))/s$ die dyadische Schale ablesen. Erst zusätzliche Schranken wie Satz 3.1 liefern daraus Informationen über gewöhnliche Größe. Bei $N = 20$, also $k = 4$, ergibt sich beispielsweise $3 \le H_{20} < 6$ und für jeden endlichen Endpunkt $M > 20$ die Schranke $0 < Z_M(2) - Z_{20}(2) < 1/20$.

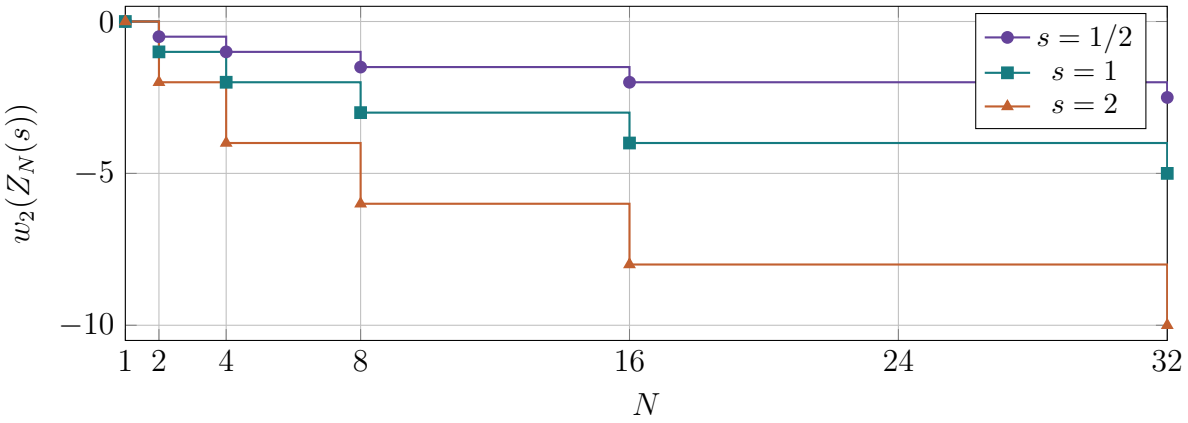

Abbildung 7: Drei Bewertungen auf derselben Skala, ohne künstlichen Versatz. Markierungen stehen an Zweierpotenzen; für dazwischenliegende ganzzahlige Indizes bleibt der Wert konstant. Alle drei Treppen fallen, aber nur die Reihe für $s = 2$ konvergiert.

9 Ausblick: Euler–Mascheroni und Lagarias

Die folgende analytische Einordnung ergänzt die endliche Rechnung. Sie ersetzt nicht deren Zähler- und Nennerinformationen.

Satz 9.1 (Eine ausdrückliche Restschranke)**.** *Es existiert eine Konstante* γ_{EM} *mit*

$$H_N = \log N + \gamma_{\mathrm{EM}} + \varepsilon_N, \qquad 0 < \varepsilon_N < \frac{1}{2N} \quad (N \geq 1).$$

Hier bezeichnet log *den natürlichen Logarithmus.*

Beweis. Setze $a_n = H_n - \log n$. Die Differenz

$$\delta_n = a_n - a_{n+1} = \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} - \frac{1}{n+1}$$

ist positiv. Weil $1/x$ strikt konvex ist, liegt sein Graph zwischen den Endpunkten strikt unter ihrer Verbindungsgeraden. Deshalb

$$0 < \delta_n < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Außerdem ist $a_n > 0$, denn auf $[j, j+1]$ ist $1/x \leq 1/j$ und somit $\log n \leq H_{n-1} < H_n$. Die fallende, nach unten beschränkte Folge a_n besitzt einen Grenzwert γ_{EM}. Für jeden endlichen $K > N$ folgt durch Teleskopieren

$$0 < a_N - a_K < \frac{1}{2N} - \frac{1}{2K}.$$

Beim Übergang $K \to \infty$ erhält man zunächst die schwache obere Schranke. Sie ist strikt, weil schon im ersten Intervall ein fester positiver Abstand zur Trapezschranke besteht. Positivität folgt aus $a_N - \gamma_{\mathrm{EM}} \geq \delta_N > 0$. □

Die Euler–Mascheroni-Konstante $\gamma_{\mathrm{EM}} = 0{,}5772156649\ldots$ misst den bleibenden Unterschied zwischen Summe und logarithmischem Vergleich. Sie ist von der Eulerschen Zahl e zu unterscheiden. Lagarias (2013) gibt einen ausführlichen Überblick.

Eine noch weiter reichende Verbindung ist der folgende *hier zitierte, nicht neu bewiesene* Satz von Lagarias (2002): Die Riemannsche Vermutung ist äquivalent zu

$$\sigma(n) \le H_n + e^{H_n} \log H_n \qquad \text{für jedes } n \ge 1,$$

wobei $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$ die Summe der positiven Teiler ist. Beispielsweise ist $\sigma(6) = 12$. Die Schwierigkeit liegt in *allen* ganzen Zahlen, nicht in der Prüfung eines endlichen Bereichs. Das ist ein Grund, harmonische Zahlen sorgfältig zu untersuchen; es ist kein durch die hier bewiesenen Bewertungsidentitäten erzielter Fortschritt zur Riemannschen Vermutung.

Materialien, Urheberschaft und Lizenz

Diese Ausarbeitung gehört zum Beitrag What makes the Harmonic Series so special? auf emmerix.net. Die begleitende Anwendung ist unter `https://play.emmerix.net/harmonics/` erreichbar. Eine einzelne `.tex`-Datei enthält sämtliche Abbildungen und Literaturangaben; zwei Läufe von pdfLaTeX genügen.

Der Ansatz und die mathematische Ausarbeitung stammen vom Autor und bauen auf den genannten Quellen auf. KI-Werkzeuge unterstützten Satz, Programmierung und die Vorbereitung von Arbeitsfassungen. Die Endredaktion liegt beim Autor. Hinweise auf übersehene Vorarbeiten oder Fehler sind willkommen: michael.t.m.emmerich@jyu.fi.

© 2026 Michael Emmerich. Originaltext, eigene Abbildungen, LaTeX-/TikZ-Quellen und eigener begleitender Programmcode: CC BY 4.0 International. Bei Weiterverwendung sind Urheber und Quelle zu nennen, die Lizenz zu verlinken und Änderungen kenntlich zu machen. Zitate und fremde Publikationen sind dadurch nicht neu lizenziert.

Zitiervorschlag: Emmerich, M. (2026, 20. Oktober). *Was macht die harmonische Reihe so besonders? Endliche Summen, Oresmes Blöcke und die Primzahlkoordinaten der Geraden und Ungeraden*. Mathematical Playground, emmerix.net.

Literatur

Emmerich, M. T. M. (2026). *The Prime Clockwork: A Dynamic Representation of Modular and Multiplicative Arithmetic*. arXiv:2609.03896. `https://arxiv.org/abs/2609.03896`.

Havil, J. (2003). *Gamma: Exploring Euler's Constant*. Princeton University Press. Vorwort von Freeman Dyson.

Kullman, D. E. (2001). What's Harmonic about the Harmonic Series? *The College Mathematics Journal*, 32(3), 201–203. `https://doi.org/10.2307/2687471`.

Lagarias, J. C. (2002). An Elementary Problem Equivalent to the Riemann Hypothesis. *The American Mathematical Monthly*, 109, 534–543. `https://arxiv.org/abs/math/0008177`.

Lagarias, J. C. (2013). Euler's constant: Euler's work and modern developments. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 50, 527–628. `https://arxiv.org/abs/1303.1856`.

Lengyel, T. (2024). On the 2-Adic Valuation of Differences of Harmonic Numbers. *Integers*, 24, A27. `https://math.colgate.edu/~integers/y27/y27.pdf`.

Sawin, W., und Kim, D. (2016). Antworten auf die Frage von cjackal: *2-adic valuation of odd harmonic sums*. MathOverflow. https://mathoverflow.net/questions/244430/2-adic-valuation-of-odd-harmonic-sums.

Stanford Encyclopedia of Philosophy. *Nicole Oresme*. https://plato.stanford.edu/entries/nicole-oresme/.

Boyd, D. W. (1994). A p-adic study of the partial sums of the harmonic series. *Experimental Mathematics*, 3(4), 287–302. Hier: §5.1 zur sukzessiven Rechnung mit endlicher Genauigkeit; §3 zur Zerlegung nach durch p teilbaren Nennern. https://emis.de/ft/52006.

Kamano, K. (2011). On 3-adic valuations of generalized harmonic numbers. *Integers*, 11, A69. S. 1–8. Hier: S. 1 (harmonische Zweier-Treppe); S. 2 (ganzzahlige Exponenten sowie Theorem 2(i) und Tabelle 1 zur Dreierspalte); Proposition 4(i)–(ii), S. 3–4 (Skalierung und das Intervall $p^k \le n < 2p^k$). https://math.colgate.edu/~integers/l69/l69.pdf.

Engler, A. J., und Prestel, A. (2005). *Valued Fields*. Springer Monographs in Mathematics. Hier ausschließlich: §3.1, S. 57–58, Chevalleys Erweiterungssatz (Theorem 3.1.1). https://doi.org/10.1007/3-540-30035-X.

OEIS Foundation. *A050605*. Dreieckszahlbezug: Kommentar von B. Cloitre, 3. Oktober 2002, korrigiert von W. Lang, 21. November 2019; Formel von R. Oudra, 8. Oktober 2019. Unser Index ist $N - 2$. https://oeis.org/A050605. Geprüft am 20. Oktober 2026.

OEIS Foundation. *A007814: Exponent of highest power of 2 dividing n*. Hier: rekursive Formel von R. Zumkeller, 11. August 2001. https://oeis.org/A007814. Geprüft am 20. Oktober 2026.

NRICH, University of Cambridge. *Reciprocal Triangles*. Abschnitt *Student Solutions*, Lösung von Etienne, Parramatta High School: endliche Teleskopformel. https://nrich.maths.org/problems/reciprocal-triangles. Geprüft am 20. Oktober 2026.

Grzegrzolka, P., und Meyer, J. L. (2026). *Sums of Reciprocals of Generalized Triangular Numbers*. arXiv:2601.16770. Hier: Abschnitt 1, *Telescoping Series Approach*, endliche Rechnung vor Gleichung (2); Abschnitt 2, Lemma 1, Differenzregel für Kehrwerte höherer Dreieckszahlen. https://arxiv.org/abs/2601.16770.